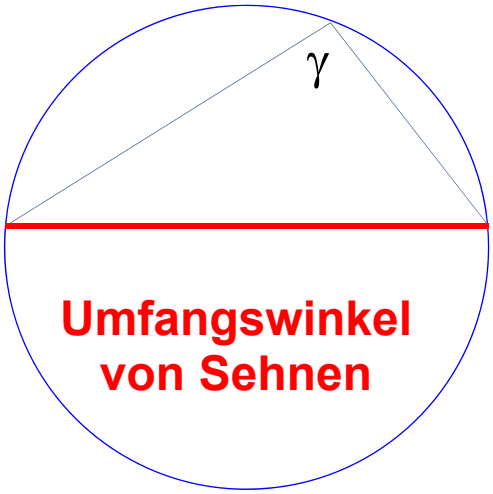
Geometrie



Umfangswinkel – Mittelpunktwinkel – Sehnen-Tangenten-Winkel
Satz des Thales – Fasskreis

Sekantensatz – Sekanten-Tangentensatz – Sehnensatz

Mit vielen Konstruktionsbeispielen

Datei Nr. 11505

Friedrich Buckel

Stand 12. April 2020

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Der Satz des Thales haftet irgendwie ähnlich wie der Satz des Pythagoras in Schülerhirnen.
Er ist jedoch nur ein Spezialfall einer Geschichte, die viel weiter geht. Man braucht dann keinen Halbkreis, ein anderer Kreisbogen eines Kreisabschnitts reicht aus. Den Winkel, der dann kein rechter mehr ist, heißt Umfangswinkel.

Doch dazu gesellen sich ein Mittelpunktswinkel und ein Sehnen-Tangentenwinkel.
Und es folgen interessante Konstruktion. So kann Geometrie schön und interessant sein.

Inhalt

1	**Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel einer Sehne**	3
2	*Für Interessierte: Wie kann man dies beweisen?*	4
3	**Der Sehnen-Tangenten-Winkel**	6
4	Zusammenfassung	7
5	Zahlenbeispiele	8
6	**Der Satz des Thales**	10
	3 Dreieckskonstruktionen mit Hilfe vom Satz des Thales	11
7	Eine spezielle **Kreistangenten-Konstruktion**	14
	„Tangente von einem Punkt an den Kreis legen“	
	Aufgabenblatt mit Musterlösungen	15
8	**Fasskreis-Konstruktionen**	23
	8.1 Den Fasskreis finden	23
	8.2 Grundaufgabe	24
	8.3 Anwendung zur Dreieckskonstruktion (3 Musterbeispiele)	25
9	**Drei Folgerungen aus den Umfangswinkeln**	28
	9.1 Der Sekantensatz	28
	9.2 Der Sekanten-Tangenten-Satz	29
	9.3 Der Sehnensatz	30
10	Aufgaben mit Lösungen	45-49

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel einer Sehne

Schneidet eine Gerade einen Kreis in A und B, dann nennt man die Strecke AB eine **Sehne.** Diese Sehne zerteilt den Kreis in zwei **Kreisabschnitte.** Wenn die Sehne durch den Kreismittelpunkt geht, liegen zwei Halbkreise vor.

Geht die Sehne nicht durch den Mittelpunkt, dann hat man einen sogenannten **inneren Kreisabschnitt**, er enthält M, und einen **äußeren Kreisabschnitt**, der M nicht enthält.

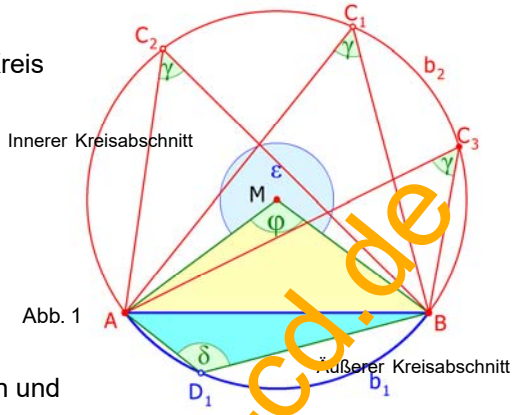


Abb. 1

Jeder der beiden Kreisabschnitte wird von einem Kreisbogen und der **Sehne AB** begrenzt. Der innere Abschnitt, der M enthält, hat den längeren Kreisbogen b_2. In der Abb. liegen die Punkte C_1, C_2 und C_3 auf diesem Bogen, der hier rot ist. Der äußere Kreisbogen b1 (blau) enthält den Punkt D_1. Er ist kürzer.

Die Abbildung enthält aber auch zwei **Kreisausschnitte.**
Der kleinere Kreisausschnitt hat die Form eines Kuchenstücks und besteht aus dem äußerem Kreisabschnitt und dem gelben Dreieck
Der Winkel φ bei M heißt der **Mittelpunktwinkel** des Ausschnitts.
Man sagt aber auch: φ ist der Mittelpunktwinkel der Sehne AB.

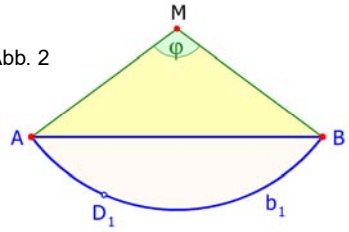


Abb. 2

In Abb. 1 habe ich 3 Punkte auf den inneren Kreisbogen gesetzt. Sie bilden Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3 (man könnte so weiter machen). Die Winkel γ dieser Dreiecke heißen **Umfangswinkel** der Strecke AB. Jetzt kommt ein wichtiges Ergebnis:

> Die vom gleichen Bogen eines Kreisabschnitts mit der Sehne AB gehenden Umfangswinkel γ sind alle gleich groß und genau halb so groß wie der entsprechende Mittelpunktswinkel φ.

Die Winkel in unseren beiden Abbildungen sind: $\gamma \approx 54{,}13^{\circ}$ und $\varphi \approx 108{,}26^{\circ}$.

Abb. 3 und auch Abb. 1 zeigen den großen Kreisausschnitt mit dem Bogen b_2 und dem Mittelpunktswinkel ε. Der Winkel δ beim Punkt D_1 auf dem äußeren Abschnitt ist auch ein Umfangswinkel zur Strecke AB.

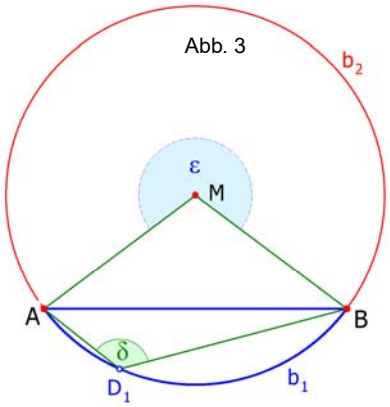


Abb. 3

Und auch für ihn gilt: $\boxed{\text{Umfangswinkel} = \dfrac{\text{Mittelspunktswinkel}}{2}}$.

Zu einer Sehne gehören also zweierlei Umfangswinkel γ und δ und Mittelpunktswinkel φ und ε.

Für sie gilt: $\gamma = \dfrac{\varphi}{2}$ und $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Addiert man beide, erhält man $\gamma + \delta = \dfrac{\varphi + \varepsilon}{2} = \dfrac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Für Interessierte: Wie kann man dies beweisen?

Diese Beweise müssen Schüler nicht selbst machen können, es ist jedoch sehr wichtig, dass man versteht, wie diese Eigenschaften bewiesen werden können. Daher können interessierte Schüler / Eltern ruhig einmal einen Blick auf die folgenden Seiten werfen. Lehrer kennen diese Beweise vielleicht in dieser oder anderer Form.

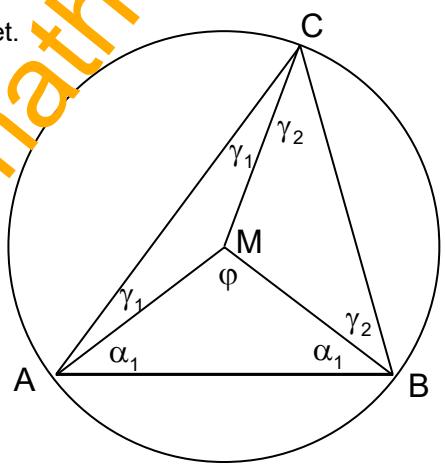
Behauptung: **Der Umfangswinkel (der auch Peripheriewinkel heißt) ist halb so groß wie der entsprechende Mittelpunktswinkel.**

Es gibt verschiedene Situationen für dieses Satz, die man auch anders beweisen muss!

1. Fall: Der Kreismittelpunkt M liegt im Innern des Dreiecks ABC

Die Abbildung zeigt ein Dreieck mit seinem Umkreis.

Ich hab zusätzlich die drei Radien MA, MB und MC eingezeichnet. Diese zerlegen die Dreieckswinkel in jeweils zwei Teile.



Dadurch entstehen drei gleichschenklige Teildreiecke AMB, BMC und AMC. Sie haben jeweils zweimal den Radius als Dreiecksseite. Also sind diese Teildreiecke gleichschenklig.

Dies wurde bereits bei der Zeichnung berücksichtigt,

denn ich habe in jedem der Dreiecke den Basiswinkel dieselben Namen gegeben.

Jetzt beginnt die Rechnung:

Die Winkelsumme im Dreieck ABC ist (wie in jedem Dreieck) natürlich 180^0:

Und das ist diese Winkelsumme: $2\alpha_1 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 180^O$ (1)

Nun die Winkelsumme im Dreieck ABM: $2\alpha_1 + \varphi = 180^O$ (2)

Subtrahiert man (1) - (2), folgt: $2\gamma_1 + 2\gamma_2 - \varphi = 0$

Ordnen ergibt: $2 \cdot \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2)}_{\gamma} = \varphi$

Wir haben das Ergebnis: $\boxed{2\gamma = \varphi}$

Der Mittelpunktswinkel ist also doppelt so groß wie der entsprechende Umfangswinkel.

Oder:

Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der entsprechende Mittelpunktswinkel.

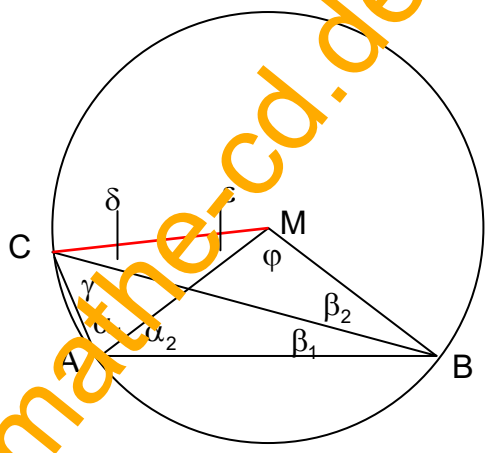
Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Fall: Der Kreismittelpunkt M liegt außerhalb des Dreiecks ABC

Der obige Beweis gilt nur, solange M im Dreiecksinnern liegt. Nun verschiebe ich C weiter nach links, so dass M außerhalb des Dreiecks zu liegen kommt und wir müssen den Satz neu beweisen!

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABM, in dem φ der Mittelpunktswinkel für die Sehne AB ist.
Und sie enthält auch das Dreieck ABC, in dem γ der Umfangswinkel für die Sehne AB ist.
Wichtig für den Beweis ist außerdem die Strecke CM, denn wir benötigen das Dreieck ACM.

Jetzt beginnt die Rechnung:



Die Winkelsumme im Dreieck ACM ist:

$$\alpha_1 + \varepsilon + \delta + \gamma = 180^\circ \qquad (1)$$

Dieses Dreieck ist gleichschenklig, denn $AM = CM = r$

Also sind die Basiswinkel gleich groß:

$$\alpha_1 = \gamma + \delta \qquad (2)$$

Ersetzt man (2) in (1), erhält man:

$$2\gamma + 2\delta + \varepsilon = 180^\circ \qquad (3)$$

Jetzt benötigt man die Winkelsumme im Dreieck CBM:

$$\delta + \beta_2 + \varphi + \varepsilon = 180^\circ \qquad (4)$$

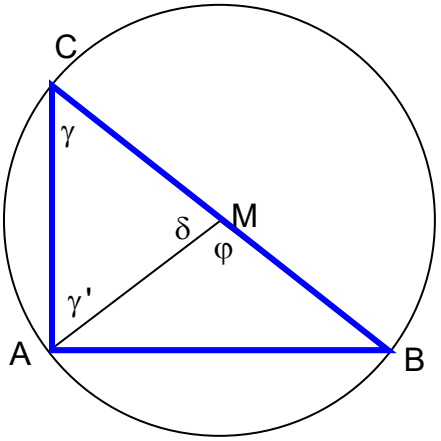
Weil auch dieses Dreieck gleichschenklig ist, gilt: $\beta_2 = \delta$:

Setzt man das in (4) ein, erhält man

$$2\delta + \varphi + \varepsilon = 180^\circ \qquad (5)$$

Nun subtrahiert man (3) – (5): $2\gamma - \varphi = 0$ also $\boxed{2\gamma = \varphi}$

3. Fall: Der Kreismittelpunkt M soll auf der Strecke BC liegen



Die Winkelsumme im Dreieck AMC beträgt:

$$\gamma + \gamma' + \delta = 180^\circ \qquad (1)$$

Weil das Dreieck gleichschenklig ist, gilt $\gamma = \gamma'$.

Also: $2\gamma + \delta = 180^\circ \qquad (2)$

Nun ist andererseits $\delta = 180^\circ - \varphi$.

Setzt man dies in (1) ein, folgt:

$$2\gamma + 180^\circ - \varphi = 180^\circ$$

Daraus folgt: $\boxed{2\gamma = \varphi}$.

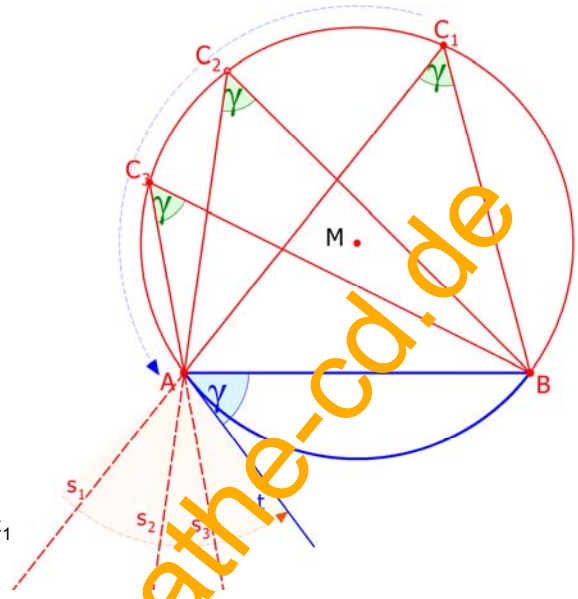
Also gilt auch in diesem Fall diese Beziehung.

Unser Satz über Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel gilt also für alle Lagen von C auf dem oberen Bogen zwischen A und B.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3 Der Sehnen-Tangentenwinkel

Die Abbildung zeigt die Situation einer Sehne AB mit 3 Umfangswinkeln von C_1, C_2, C_3 aus. Wir wissen nach Abschnitt 1, dass diese drei Umfangswinkel γ alle gleich groß sind.



Jetzt stellen wir uns eine Bewegung innerhalb der Abbildung vor: Dazu habe ich zwei Kreisbogenpfeile eingezeichnet.

(1) Ausgangspunkt ist das Dreieck ABC_1. Die Seite C_1A wurde zu einer Halbgeraden s_1 verlängert.

(2) Dann halten wir AB fest und drehen den Punkt C_1 auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn weiter in die Lage von C_2.

Damit wird aus dem Dreieck ABC_1 das Dreieck ABC_2. Und der verlängerte Schenkel des Umfangswinkels ist jetzt s_2.

(3) Dies setzen wir fort und drehen C_2 nach C_3, was uns zum Dreieck ABC_3 führt. Der verlängerte Scheitel ist nun s_3.

(4) Wenn wir die Drehung fortsetzen, wandert C_3 nach A und der Schenkel s_3 wird zur Tangente t.

Aus dem Umfangswinkel γ wurde nun ein Winkel zwischen der Sehne AB und der Tangente t. Man nennt diesen Winkel den **Sehnen-Tangentenwinkel.**

Man erkennt, dass sich bei der Drehung von C auf dem Kreis bis A der Winkel γ in seiner Größe nicht ändert. Also gilt:

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich groß wie die Umfangswinkel, aus denen er hervorgeht.

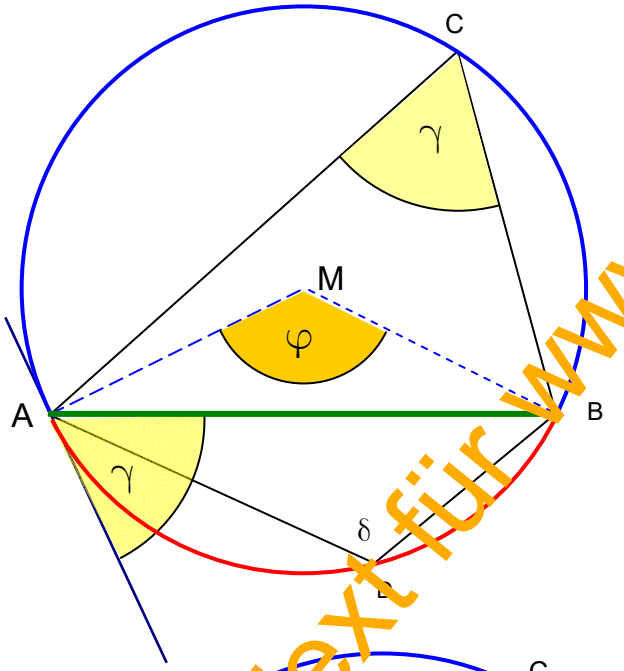
Demo-Text für www.mathe-cd.de

4 Zusammenfassung

(1) Alle Umfangswinkel, deren Scheitel auf demselben Bogen $\overset{\frown}{AB}$ liegen, sind gleich groß, denn sie sind halb so groß, wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

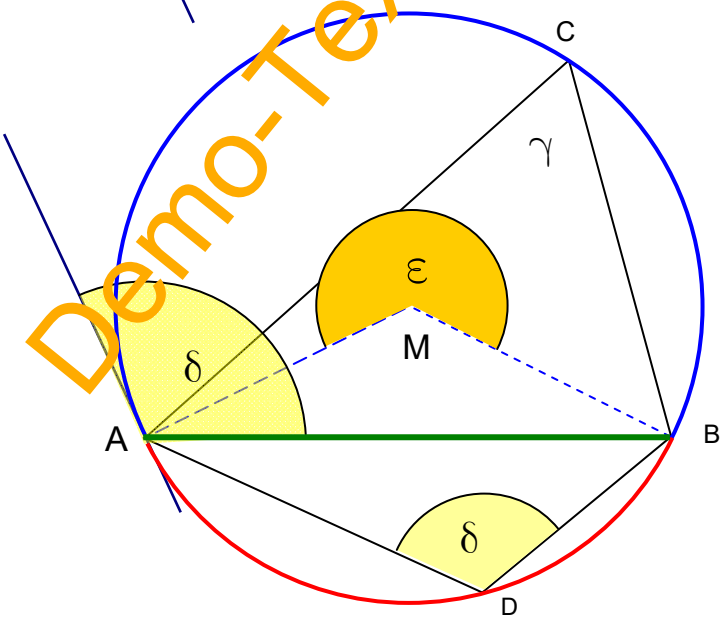
(2) Der Sehnen-Tangenten-Winkel ist genau so groß wie der Umfangswinkel, aus dem er durch Annäherung des Scheitels C an A oder B entsteht.

(3) Zwei Umfangswinkel über derselben Sehne, deren Scheitel auf verschiedenen Seiten von AB liegen, sind zusammen 180° groß.



Die obere Abbildung zeigt den Umfangswinkel bei C, er zeigt nach unten, genau wie der entsprechende Mittelpunktswinkel und der zugehörige Sehnen-Tangenten-Winkel.

Die untere Abbildung zeigt den Umfangswinkel bei D, er zeigt nach oben, genau wie der entsprechende Mittelpunktswinkel und der zugehörige Sehnen-Tangenten-Winkel



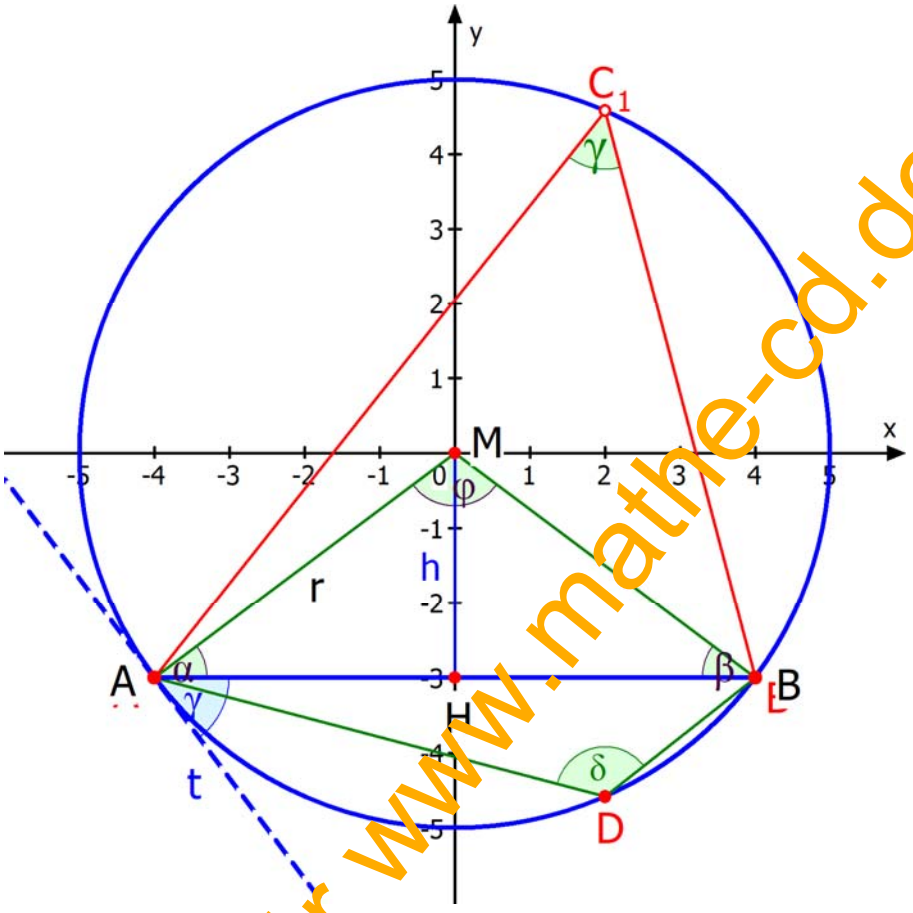
Die beiden Umfangswinkel bei D und C, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen, haben zusammen 180°:

$$\boxed{\gamma + \delta = 180^{\circ}}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

5 Zahlenbeispiele

(1) Ein Kreis hat den Radius 5 und die Sehne AB die Länge 8.



Das Dreieck ABM ist gleichschenklig weil $\overline{AM} = \overline{BM} = r$ ist. Im rechtwinkligen Teildreieck AHM kann man daher den Winkel bei M berechnen. Er ist $\frac{1}{2}\varphi$, der halbe Mittelpunktswinkel.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AH}{AM} = \frac{\frac{1}{2}AB}{r} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\frac{\varphi}{2} = \sin^{-1}(0{,}8) \approx 53{,}13^{O} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 106{,}26^{O}}$$

Die Umfangswinkel auf dem inneren Bogen ACB sind genau halb so groß, also $\gamma = 53{,}13^{O}$.

Der Umfangswinkel auf dem anderen Bogen, also bei D hat dann die Größe $\delta = 180^{O} - \gamma = 126{,}87^{O}$:

Dazu gehört der große Mittelpunktswinkel $\varepsilon = 360^{O} - \varphi = 253{,}74^{O}$

Er ist aber auch doppelt so groß wie der Umfangswinkel δ: $\varepsilon = 2 \cdot 126{,}87^{O} = 253{,}74^{O}$.

Als letztes hatten wir über den Sehnen-Tangenten-Winkel gesprochen.

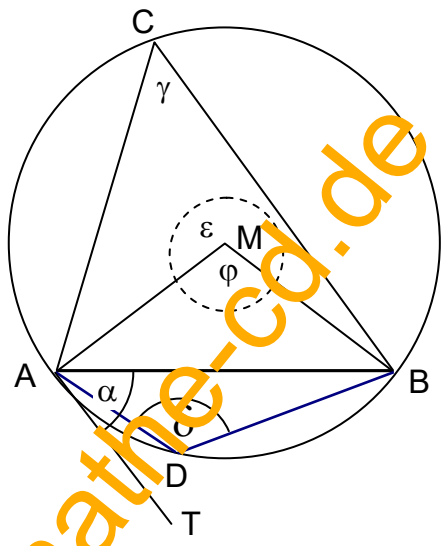
Sein Scheitel ist bei A. die beiden Schenkel sind die Sehne AB und die Kreistangente in A.

Er hat dieselbe Größe wie der Umfangswinkel $\gamma = 53{,}13^{O}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(2) Der folgende Kreisradius ist beliebig. Der Winkel $\varphi = 110^{\circ}$ werde von M aus eingezeichnet. Die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Kreis heißen A und B.

Die folgende Abbildung ist nicht maßstäblich, sondern nur als Skizze zu verstehen.



Aus $\varphi = 110^{\circ}$ folgt $\gamma = \frac{1}{2}\varphi = 55^{0}$.

Der Sehnentangentenwinkel α ist genauso groß: $\alpha = 55^{\circ}$.

Der γ gegenüberliegende Umfangswinkel ist:

$$\delta = 180^{\circ} - \gamma = 180^{\circ} - 55^{\circ} = 125^{\circ}$$

Der zum Umfangswinkel δ gehörende Mittelpunktswinkel ε ist nun wiederum doppelt so groß wie der zugehörige Umfangswinkel δ:

$$\varepsilon = 2 \cdot \delta = 2 \cdot 125^{\circ} = 250^{\circ}.$$

Und das wiederum passt genau zur Winkelsumme am Mittelpunkt:

$$\varphi + \varepsilon = 110^{\circ} + 250^{\circ} = 360^{\circ} \text{ !!}$$

(3) Der Sehnen-Tangenten-Winkel beträgt 40°. Dann ist der Umfangswinkel gleich groß: $\gamma = \alpha = 40^{\circ}$. Der zugehörige Mittelpunktswinkel: $\varphi = 2\gamma = 80^{\circ}$.

Der Umfangswinkel auf der anderen Seite der Sehne AB: $\delta = 180^{\circ} - \gamma = 140^{\circ}$

und der dazu gehörende Mittelpunktswinkel: $\varepsilon = 2\delta = 280^{\circ}$ oder

$$\varepsilon = 360^{\circ} - \varphi = 280^{\circ}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de